1.1. Пусть X — множество, $P(X)$ — множество всех его подмножеств. Оператором замыкания называется отображение

$$\kappa: P(X) \to P(X),$$

удовлетворяющее аксиомам Куратовского:

(К1). $\kappa(\emptyset) = \emptyset$;

(К2). $\forall M \subseteq X,\ M \subseteq \kappa(M)$;

(К3). $\forall M \subseteq X,\ \kappa(M) = \kappa\big(\kappa(M)\big)$;

(К4). $\forall M, N \subseteq X,\ \kappa(M \cup N) = \kappa(M) \cup \kappa(N)$.

A. Покажите, что всякий оператор замыкания определяет топологию на X; обратно, если на X задана топология, то операция $M \mapsto \bar{M}$ (замыкание множества) является оператором замыкания.

B. Проверьте, что аксиомы (К1)-(К4) можно получить из следующего условия:

$$\forall M, N \subseteq X, \qquad M \cup \kappa(M) \cup \kappa\big(\kappa(N)\big) = \kappa(M \cup N) \setminus \kappa(\emptyset).$$

Доказательство. Подставим

$M = N = \emptyset \Longrightarrow \kappa(\emptyset) \cup \kappa\big(\kappa(\emptyset)\big) = \emptyset \Longrightarrow \kappa(\emptyset) = \emptyset$ (К1);

$N = \emptyset \Longrightarrow M \cup \kappa(M) = \kappa(M) \Longrightarrow M \subseteq \kappa(M)$ (К2);

$M = \emptyset \Longrightarrow \kappa\big(\kappa(N)\big) = \kappa(N)$ (К3);

$\kappa(M) \cup \kappa(N) = M \cup \kappa(M) \cup \kappa\big(\kappa(N)\big) = \kappa(M \cup N)$ (К4).

C. Пусть κ_1, κ_2 — операторы замыкания на X, а $\tau_1, \tau_2 \in \mathrm{T}_X$ — индуцируемые ими топологии на X. Если $\forall M \subseteq X, \kappa_2(M) \subset \kappa_1(M)$, то $\tau_1 \preccurlyeq \tau_2$.

Доказательство. Действительно, если $Y \in \tau_1$, то для некоторого $M \subseteq X$ имеем $Y = X \setminus \kappa_1(M) \subset X \setminus \kappa_2(M) \in \tau_2$, а значит $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

D. Пусть X — топологическое пространство. Для любого множества $M \subseteq X$ определим множество

$$[M]_{\text{seq}} = \{x \in X : \exists \{x_n\} \to x, x_n \in M\}$$

как множество всех точек пространства X, для которых найдется сходящаяся к ним последовательность точек M. Определим оператор секвенциального замыкания

$$[\ ]_{\text{seq}}: P(X) \to P(X), \qquad M \mapsto [M]_{\text{seq}}.$$

Проверьте, что оператор $[\ ]_{\text{seq}}$ удовлетворяет аксиомам (К1), (К2) и (К4).

Доказательство. Имеем

$\forall x \in X\ \nexists \{x_n\} \subset \emptyset : x_n \to x \Longrightarrow [\emptyset]_{\text{seq}} = \emptyset$ (К1);

$\forall M \subseteq X\ \forall x \in M$ последовательность $\{x\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ и стремится к $x \Longrightarrow M \subseteq [M]_{\text{seq}}$ (К2);

$\forall M, N \subseteq X\ [M \cup N]_{\text{seq}} \supseteq [M]_{\text{seq}} \cup [N]_{\text{seq}}$, т.к.

$$x \in [M]_{\text{seq}} \Longrightarrow \exists \{x_n\} \subset M, x_n \to x \Longrightarrow \exists \{x_n\} \subset M \cup N, x_n \to x \Longrightarrow x \in [M \cup N]_{\text{seq}},$$

и $[M \cup N]_{\text{seq}} \subseteq [M]_{\text{seq}} \cup [N]_{\text{seq}}$, т.к.

$$x \in [M \cup N]_{\text{seq}} \Longrightarrow \exists \{x_n\} \subset M \cup N, x_n \to x$$
$$\Longrightarrow \exists \{x_{n_k}\} \subset M \vee \exists \{x_{n_k}\} \subset N, x_{n_k} \to x \Longrightarrow x \in [M]_{\text{seq}} \cup [N]_{\text{seq}} \text{ (К4).}$$

1.2. Пусть X, Y — метрические пространства, ρ — метрика на Y. Отображение $f: X \to Y$ (необязательно непрерывное) называется ограниченным, если $\operatorname{diam} fX < \infty$. Множество всех ограниченных отображений из X в Y обозначается как $B(X, Y)$.

Для произвольных $f, g \in B(X, Y)$ определим расстояние $\rho(f, g)$:

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} \rho\big(f(x), g(x)\big).$$

A. Докажите, что $\rho(f, g)$ — конечное неотрицательное число, определяющее метрику на $B(X, Y)$.

Доказательство. $\forall x, y \in X$ имеем

$$\rho\big(f(x), g(x)\big) \le \rho\big(f(x), f(y)\big) + \rho\big(f(y), g(y)\big) + \rho\big(g(y), g(x)\big) \le$$
$$\le \operatorname{diam} fX + \rho\big(f(y), g(y)\big) + \operatorname{diam} gX.$$

Перейдя к супремуму по x и инфимуму по y получаем

$$\rho(f, g) \le \operatorname{diam} fX + \inf_{y\in X} \rho\big(f(y), g(y)\big) + \operatorname{diam} gX < \infty.$$

$\forall x \in X\ \forall f, g, h \in B(X, Y)$ имеем $\rho\big(f(x), g(x)\big) \le \rho\big(f(x), h(x)\big) + \rho\big(h(x), g(x)\big)$, откуда

$$\rho(f, g) = \sup_{x\in X} \rho\big(f(x), g(x)\big) \le \sup_{x\in X} \Big(\rho\big(f(x), h(x)\big) + \rho\big(h(x), g(x)\big)\Big)$$
$$\le \sup_{x\in X} \rho\big(f(x), h(x)\big) + \sup_{x\in X} \rho\big(h(x), g(x)\big) = \rho(f, h) + \rho(h, g),$$

следовательно, ρ — метрика на $B(X, Y)$.

B. Докажите, что множество $C(X, Y)$ всех ограниченных непрерывных отображений из X в Y замкнуто в метрическом пространстве $B(X, Y)$.

Доказательство. Пусть $C(X, Y) \supset \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \to f$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n \ge N\ \rho(f_n, f) < \varepsilon$ и

$$\rho\big(f(x), f(y)\big) \le \rho\big(f(x), f_n(x)\big) + \rho\big(f_n(x), f_n(y)\big) + \rho\big(f_n(y), f(y)\big) < 2\varepsilon + \operatorname{diam} f_n X,$$

а значит $\operatorname{diam} fX = \sup\limits_{x,y\in X} \rho\big(f(x), g(x)\big) < 2\varepsilon + \operatorname{diam} f_n X < \infty$. Также видно, что при $x \to y$

$$\rho\big(f(x), f(y)\big) \le 2\varepsilon + \rho\big(f_n(x), f_n(y)\big) \to 2\varepsilon,$$

а поскольку это верно для любого $\varepsilon > 0$, то f — непрерывна.

1.3.

A. Докажите, что всякое метрическое пространство X является нормальным пространством.

Доказательство. Пусть $M, N \subset X$ — непересекающиеся замкнутые подмножества. Положим $f(x) = \frac{\rho(x,M)}{\rho(x,M)+\rho(x,N)}$; ясно, что она непрерывна на X. Имеем $f(x) = 0$ на M и $f(x) = 1$ на N, следовательно $U_M = f^{-1}\left(\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$ и $U_N = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right)$ есть непересекающиеся окрестности M и N. Таким образом X — нормально.

B. Могут ли два непустых непересекающихся замкнутых подмножества F_1, F_2 в метрическом пространстве X находится друг от друга на расстоянии, равном нулю?

Ответ: да, например ветвь гиперболы и ее асимптота.

1.4. Функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется аддитивной, если

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \qquad \forall x, y.$$

Как известно из курса анализа, всякая непрерывная аддитивная функция f является линейной функцией $f(x) = cx$, $c \in \mathbb{R}$. Покажите, что если аддитивная функция f разрывна (такие существуют в ZFC), то ее график

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) = y\}$$

является всюду плотным в $\mathbb{R}^2$ множеством.

Доказательство. Сначала заметим, что $\forall \alpha \in \mathbb{Q}\ \forall x \in \mathbb{R}\ f(\alpha x) = \alpha f(x)$. Действительно, $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$f(0) + f(0) = f(0) \Longrightarrow f(0) = 0$$
$$nf(x) = f(x) + \dots + f(x) = f(x + \dots + x) = f(nx)$$
$$f(-nx + nx) = 0 \Longrightarrow f(-nx) = -f(nx) = -nf(x).$$

Значит, $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbb{R}\ f(nx) = nf(x)$. Отсюда

$$f(x) = f\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = nf\left(\frac{x}{n}\right) \Longrightarrow f\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n}f(x)$$

и

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = mf\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{m}{n}f(x),$$

что и требовалось.

Теперь, если Γ_f лежит в одномерном подпространстве $\mathbb{R}$, т.е. является прямой, то он, очевидно, совпадает с $\{(x, xf(1)): x \in \mathbb{R}\}$ и, таким образом, является непрерывным вопреки условию задачи. Значит, существуют различные точки $u, v \in \mathbb{R}$ такие, что $(u, f(u))$ и $(v, f(v))$ не коллинеарны. Отсюда $S \coloneqq \{(\alpha u + \beta v, \alpha f(u) + \beta f(v)): \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\} \subset \Gamma_f$, а поскольку S всюду плотно, то и Γ_f всюду плотен.

1.5. Пусть множество X есть полуинтервал $[0,1)$. Рассмотрим семейство $\mathcal{B}$ подмножеств X, состоящее из всех полуинтервалов вида

$$[x, x'), 0 \le x < x' < 1.$$

A. Проверьте, что система множеств $\mathcal{B}$ является базой некоторой топологии на X (т.е. на X определена топология посредством указания базы).

Далее под X мы будем понимать топологическое пространство с топологией, определенной при помощи базы $\mathcal{B}$.

Доказательство. 1) $\forall x \in X\ x \in \left[x, \frac{x+1}{2}\right) \in \mathcal{B}$;

2) $x \in [y, y') \cap [z, z') \Longrightarrow x \in [\max(y, z), \min(y', z')) \subset [y, y') \cap [z, z')$.

B. Покажите, что пространство X удовлетворяет первой аксиоме счётности.

Доказательство. Пусть $x \in X$, $x \in [y, y') \in \mathcal{B}$. Тогда $\exists I \in \left\{\left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \cap [y, y'): n \in \mathbb{N}\right\}$ так, что $I \subset [y, y')$ и $I \in \mathcal{B}$.

C. Покажите, что X не обладает счетной базой.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует счетное $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, являющееся базой, т.е. $\forall [x, x') \in \mathcal{B}'$ и $\forall [y, y') \in \mathcal{B}'$ таких, что $x \le y < y' \le x'$, из $x \in [y, y')$ следует, что $y = x$, т.е. $\mathcal{B}'$ должна содержать как минимум континуальное множество полуинтервалов вида $[x, x')$ для всех $x \in [0,1)$ — противоречие.

2.1. (*Хаусдорфовость и диагональ*) Покажите, что пространство X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ

$$\Delta = \{(x,x), x \in X\} \subset X \times X$$

является замкнутым подмножеством $X \times X$ (в топологии Тихонова).

Доказательство. Пусть X — хаусдорфово и пусть $x, y \in X$, $x \neq y$. Тогда существуют их непересекающиеся окрестности: $\exists U_x \ni x, V_y \ni y: U_x \cap V_y = \emptyset$. Значит $U_x \times V_y \subset X \times X \setminus \Delta$, и, тем самым, $X \times X \setminus \Delta$ — открыто, а Δ — замкнуто.

Пусть теперь Δ — замкнуто. Тогда $X \times X \setminus \Delta$ — открыто и $\forall x, y \in X$ существует элементарное открытое множество $U_x \times V_y \subset X \times X \setminus \Delta$, которое означает, что $U_x \cap V_y = \emptyset$, откуда X — хаусдорфово.

2.2. (*Свойства тихоновской топологии*) Пусть $\{X_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ — некоторое множество топологических пространств, $X = \Pi_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ — декартово произведение множеств X_α, а $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ — проекции на сомножители.

A. Покажите, что топологию Тихонова на X можно определить как слабейшую топологию, в которой все проекции π_α непрерывны.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ — база тихоновской топологии на X. Пусть $\mathcal{T}$ такая топология на X, что все проекции π_α непрерывны. Тогда для любого конечного набора $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ и для любых открытых $U_{\alpha_i} \subset X_{\alpha_i}$ должно быть верно, что $\pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \dots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$ открыто в $\mathcal{T}$. Значит

$$\pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \dots \cap \pi_{\alpha_s}^{-1}(U_{\alpha_s}) = \prod_{i=1}^{s} U_{\alpha_i} \times \prod_{\alpha \in \mathfrak{A} \setminus \{\alpha_i\}_{i=1}^{s}} X_\alpha,$$

которое показывает, что $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Поэтому любая топология, в которой все проекции непрерывны, содержит в себе по крайней мере все множества $\mathcal{B}$ как открытые множества. Следовательно, брав $\mathcal{B}$ в качестве базы получаем слабейшую топологию, в которой все проекции непрерывны.

B. Покажите, что совокупность прообразов при проекциях π_α открытых множеств в X_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, образуют предбазу тихоновской топологии.

Доказательство. Поскольку для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$ и открытого $U \subset X_\alpha$ прообраз U есть $U \times \Pi_{\alpha' \neq \alpha} X_{\alpha'}$, то, очевидно, конечное пересечение всяких таких прообразов дает множество из базы $\mathcal{B}$, причем для любого множества из $\mathcal{B}$ найдется конечное количество таких прообразов, в пересечении дающих это множество. Следовательно, объединение всех таких прообразов совпадает с предбазой тихоновской топологии.

C. Введем на множестве X топологию τ_{box}, выбрав в качестве базы систему всех декартовых произведений открытых множеств в X_α (т.е. базой является декартово произведение топологий на X_α). В каком случае топология τ_{box} совпадает с топологией Тихонова?

Решение. Очевидно, что если $\mathfrak{A}$ — конечно, то обе топологии совпадают. Пусть теперь $\mathfrak{A}$ бесконечно. Пусть также $I \subset \mathfrak{A}$ такое бесконечное множество индексов, что $\forall \alpha \in I$ в топологии X_α существует непустое открытое собственное подпространство U_α пространства X_α (если такое I не существует, то снова две топологии совпадают). Тогда множество

$$U \coloneqq \prod_{\alpha \in I} U_\alpha \times \prod_{\alpha \in \mathfrak{A} \setminus I} X_\alpha$$

является открытым в τ_{box}, но не является открытым в тихоновской топологии, поскольку там U не содержит ни единое открытое множество. Таким образом в этом случае топологии отличны.

D. Покажите, что пространство X (с топологией Тихонова) вместе с проекциями π_α удовлетворяет следующему *универсальному свойству*:

> для данного пространства Y и данных непрерывных отображений $f_\alpha : Y \to X_\alpha$ (заданных для каждого α) существует единственное непрерывное отображение $f : Y \to X$, такое что $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ при всех α.
> Обратно, если некоторое пространство $\tilde{X}$ вместе с непрерывными отображениями $\tilde{\pi}_\alpha : \tilde{X} \to X_\alpha$ таково, что для них выполнено указанное универсальное свойство, то $\tilde{X}$ гомеоморфно тихоновскому произведению пространств X_α.

Доказательство. Определим f как

$$f(x) = f\left(\prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} x_\alpha\right) \coloneqq \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} f_\alpha(x_\alpha),$$

которое, очевидно, удовлетворяет условию $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$. Такое отображение единственно, поскольку отображение определяется с его компонентами: для отображения g

$$g(x) = g\left(\prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} x_\alpha\right) = \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \pi_\alpha\big(g(x)\big) = \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} (\pi_\alpha \circ g)(x).$$

Проверим непрерывность f: для любого открытого множества $\prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} U_\alpha$, где лишь для конечного множества индексов $U_\alpha \neq X_\alpha$, имеем

$$f^{-1}\left(\prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} U_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} f_\alpha^{-1}(U_\alpha),$$

а поскольку f_α непрерывны и в пересечении кроме как конечного числа множеств остальные совпадают со всем X, то и пересечение есть открытое множество. Значит f непрерывно.

Докажем вторую часть утверждения. Согласно первой части утверждения по универсальному свойству X существует отображение $f : \tilde{X} \to X$ со свойством $\tilde{\pi}_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$ (т.е. f коммутирует с проекциями). Аналогично, по универсальному свойству $\tilde{X}$ существует отображение $\tilde{f} : X \to \tilde{X}$ коммутирующее с проекциями. Покажем, что f — изоморфизм и $\tilde{f}$ есть обратный к нему. Действительно, композиция $\tilde{f} \circ f : \tilde{X} \to \tilde{X}$ тоже коммутирует с проекциями. С другой стороны, тождественное отображение $\mathrm{id}_{\tilde{X}}$ тоже обладает этим свойством, а значит в силу универсального свойства совпадает с $\tilde{f} \circ f$. Абсолютно аналогично получаем и обратный результат $f \circ \tilde{f} = \mathrm{id}_X$, доказывающий вторую часть задачи.

E. Проверьте, что проекции π_α являются открытыми отображениями.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ — база тихоновской топологии на X. Тогда для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$ и для любого открытого $U \subset X_\alpha$

$$\pi_\alpha^{-1}(U) = U \times \prod_{\alpha' \neq \alpha} X_{\alpha'} \in \mathcal{B},$$

т.е. $\pi_\alpha^{-1}(U)$ — открыто и π_α непрерывно.

2.3. (*Неприводимые пространства*) Топологическое пространство X называется неприводимым, если X непусто и если его нельзя представить в виде объединения $V_1 \cup V_2$ двух собственных замкнутых множеств (необязательно непересекающихся — таким образом, неприводимость является усилением связности). Докажите следующие предложения о неприводимых пространствах.

A. Следующие утверждения равносильны:

(1) X неприводимо.
(2) Всякие два непустых открытых подмножества $U_1, U_2 \subseteq X$ имеют непустое пересечение.
(3) Всякое непустое открытое подмножество U всюду плотно в X.

Доказательство. (1) $\Longrightarrow$ (2) Пусть существуют непустые открытые множества U_1, U_2 так, что $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Тогда для замкнутых собственных подмножеств $V_1 = X \setminus U_1$ и $V_2 = X \setminus U_2$ имеем $X = V_1 \cup V_2$ — противоречие.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Пусть $U \subset X$ — открыто и непусто. Тогда $\forall x \in X$ для любой окрестности U_x верно $U \cap U_x \neq \emptyset$, а значит $x \in [U]$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Пусть $X = V_1 \cup V_2$ для собственных замкнутых подпространств V_1, V_2. Тогда открытые непустые $U_i = X \setminus V_i$ не пересекаются, и $[U_i] \neq X$ — противоречие.

B. Непрерывный образ неприводимого пространства является неприводимым пространством.
Доказательство. Пусть для непрерывного отображения f имеем $fX = V_1 \cup V_2$, где V_i замкнуты и непусты. Тогда $X = f^{-1}V_1 \cup f^{-1}V_2$ — объединение замкнутых непустых множеств — противоречие.

C. Пусть X — топологическое пространство. Если Y — неприводимое пространство в X, то замыкание Y в X неприводимо.
Доказательство. Пусть $\bar{Y}$ не является неприводимым. Тогда существуют замкнутые в X множества U_1, U_2 такие, что $\bar{Y}$ не лежит ни в одном из них, но покрывается их объединением. Если $Y \subset U_1$, то $\bar{Y} \subset \overline{U_1} = U_1$ — противоречие (аналогично с U_2). Отсюда Y не лежит ни в один из U_1, U_2, но они вместе покрывают Y, т.е. $Y = V_1 \cup V_2$, где $V_i = U_i \cap Y$ — замкнутые в Y множества — противоречие. Значит $\bar{Y}$ неприводим.

D. Пусть X — топологическое пространство. Любое неприводимое подпространство X содержится в некотором максимальном неприводимом подпространстве.
Доказательство. Пусть $\{Y_i\}_{i \in I}$ — цепь неприводимых подпространств в X (т.е. $\forall i, j \in I$ либо $Y_i \subset Y_j$, либо $Y_j \subset Y_i$ и для любого множества Z не из цепи верно, что $Y_i \not\subseteq Z$ и $Z \not\subseteq Y_i$ для любого $i \in I$). Рассмотрим $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$. Покажем, что оно неприводимо. Действительно, для любых непустых открытых $S, T \subset Y$ верно, что $S \cap Y_i$ и $T \cap Y_j$ тоже непусты для некоторых $i, j \in I$. Без ограничения общности $Y_i \subset Y_j$ (поскольку они в одной цепи). Тогда $S \cap Y_j$ и $T \cap Y_j$ непустые открытые подмножества неприводимого подпространства A_j, а значит пересекаются. Следовательно, S и T тоже пересекаются, откуда Y неприводимо. Таким образом Y является максимальным неприводимым элементом для любого Y_i из цепи (не может случится так, что $Y \subset Z$, где Z — неприводимо, поскольку тогда и Z было бы в цепи).

E. Максимальные неприводимые подпространства X замкнуты и покрывают X. (Они носят название неприводимых компонент X.)
Доказательство. По пункту C замыкание неприводимого множества неприводим, а значит максимальное неприводимое множество тоже должно быть замкнутым. Очевидно, все максимальные множества покрывают X, поскольку для любого элемента $x \in X$ множество $\{x\}$ неприводимо, а значит содержится в некотором максимальном неприводимом множестве.

F. Пусть X — бесконечное множество. Тогда коконечная топология на X неприводима.
Доказательство. Если топология коконечная, то любое замкнутое множество конечно, а значит пересечение любых двух замкнутых множеств тоже конечно и не может покрывать все X. Значит X неприводим.

G. Топологическое произведение неприводимых пространств неприводимо.

Доказательство.

2.4. (*Продолжение непрерывных функций в нормальных пространствах*) Применяя Большую теорему Урысона, докажите следующую теорему:

Теорема 1. Пусть X — нормальное пространство и Φ — его замкнутое подмножество. Всякая ограниченная непрерывная функция

$$\varphi\colon \Phi \to \mathbb{R}$$

может быть продолжена на все пространство X, т.е. существует непрерывная функция

$$f\colon X \to \mathbb{R},$$

совпадающая с φ во всех точках множества Φ. Если m есть точная верхняя грань функции $|\varphi|$ на Φ, то функцию f можно подобрать так, чтобы верхняя грань $|f|$ также была равна m.

Покажите также, что Теорема 1 характеризует нормальные пространства среди всех T_1-пространств.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $m < \infty$. Определим

$$A_0 = \left\{x \in \Phi\colon \varphi(x) \le -\frac{m}{3}\right\}, \qquad B_0 = \left\{x \in \Phi\colon \varphi(x) \ge \frac{m}{3}\right\}.$$

Очевидно, эти множества замкнуты и не пересекаются. По теореме Урысона существует непрерывная функция $\varphi_0\colon X \to \left[-\frac{m}{3}, \frac{m}{3}\right]$, равная $-\frac{m}{3}$ на A_0 и $\frac{m}{3}$ на B_0. Тогда на Φ верны

$$|\varphi_0| \le \frac{m}{3}, \qquad |\varphi - \varphi_0| \le \frac{2m}{3}.$$

Теперь рассмотрим множества

$$A_1 = \left\{x \in \Phi\colon (\varphi - \varphi_0)(x) \le -\frac{2m}{9}\right\}, \qquad B_1 = \left\{x \in \Phi\colon (\varphi - \varphi_0)(x) \ge \frac{2m}{9}\right\},$$

которые тоже, очевидно, замкнуты и не пересекаются. Снова применив теорему Урысона находим непрерывную функцию $\varphi_1\colon X \to \left[-\frac{2m}{9}, \frac{2m}{9}\right]$, равную $-\frac{2m}{9}$ на A_1 и $\frac{2m}{9}$ на B_1. Снова на Φ

$$|\varphi_1| \le \frac{2m}{9}, \qquad |\varphi - \varphi_0 - \varphi_1| \le \frac{4m}{9}.$$

Продолжая аналогично получаем последовательность функций φ_n, для которых на Φ

$$|\varphi_n| \le \frac{2^n m}{3^{n+1}}, \qquad |\varphi - \varphi_0 - \cdots - \varphi_n| \le \frac{2^{n+1} m}{3^{n+1}}.$$

Положим $\psi_n = \varphi_0 + \cdots + \varphi_n$. Тогда последовательность функций ψ_n фундаментальна: $\forall n > m$

$$|\psi_m - \psi_n| = |\varphi_{m+1} + \cdots \varphi_n| \le \frac{m}{3}\left(\frac{2^{m+1}}{3^{m+1}} + \cdots + \frac{2^n}{3^n}\right) < \frac{m}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}}.$$

Значит последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к какой-то непрерывной функции f на X, которая и есть искомая. Заметим, что верхняя грань $|f| = m$. Действительно, поскольку $f|_\Phi = \varphi$, то $|f| \ge |\varphi| = m$. С другой стороны

$$|f| = \left|\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_0\right| \le \sum_{i=0}^{\infty} |\varphi_0| \le \frac{m}{3} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i = \frac{m}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = m,$$

а значит $|f| = m$.

В случае, когда $m = \infty$ рассмотрим произвольный гомеоморфизм $g\colon (-\infty, \infty) \to (-1, 1)$; тогда $g \circ \varphi$ конечна на Φ, поэтому может быть продолжена до какой-то функции h на X. Тогда $g^{-1}h$ есть искомая функция.

2.5. (*Один пример*) Пусть множество X есть декартово произведение двух копий единичного отрезка $[0,1]$. Введем на X порядковую топологию, задав на X лексикографическое упорядочение:

$$(a,b) < (c,d) \Leftrightarrow a < c \vee a = c, b < d.$$

Покажите, что полученное топологическое пространство является связным бикомпактом. Проверьте, что он удовлетворяет первой аксиоме счетности. Является ли это пространство метризуемым?

Доказательство. Для бикомпактности по теореме Александера достаточно для всякого покрытия элементами предбазы найти его конечное подпокрытие. Пусть множества $A_i = \{c : c < a_i\}$ и $B_j = \{c : c > b_j\}$ $i \in I, j \in J$ покрывают X. Пусть $a = \sup a_i$ и $b = \inf b_j$. Тогда два множества $A = \{c : c < a\}$ и $B = \{c : c > b\}$ покрывают X, поскольку иначе существовала бы точка $x \in X \setminus (A \cup B)$, которая не была бы покрыта и начальным покрытием $\{A_i\}_{i \in I} \cup \{B_j\}_{j \in J}$, ч.т.д.

Связность X следует из следующей теоремы:

Теорема. Линейно упорядоченное пространство T с порядковой топологией связна тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in T$ существует элемент между x, y и любое ограниченное подмножество T имеет супремум.

Пусть $(u,v) \in X$. Тогда Система окрестностей $U_n = \left\{(x,y) \in X : x \in U_{\frac{1}{n}}(u), y \in U_{\frac{1}{n}}(v)\right\}$ является счетной локальной базой.

X не является метризуемым, поскольку любое компактное метрическое пространство (для метрических пространств бикомпактность и компактность означают то же самое) является сепарабельным, что неверно для X. Действительно, X содержит континуальное количество континуальных открытых множеств $U_x = \left\{(x,y) : \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}\right\}$, $x \in [0,1]$, а значит любое плотное подмножество X должен содержать хотя бы по одной точке в каждом из U_x и, тем самым, более чем счетно.

3.1. (*Нетеревы пространства*) Топологическое пространство X называется нетеревым пространством, если его открытые множества удовлетворяют так называемому *условию обрыва возрастающих цепочек*:

— любая возрастающая цепочка

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots \subseteq U_n \subseteq \cdots$$

стационарна, т.е. существует такое n, что $U_n = U_{n+1} = \cdots$. Очевидно, выполнение этого условия для всех открытых множеств равносильно выполнению условия обрыва убывающих цепочек (которое формулируется, очевидно, аналогичным образом) для системы всех замкнутых множеств.

A. Покажите, что если X — нетерово пространство, то любое подпространство $Y \subseteq X$ тоже нетерово.

Доказательство. Пусть $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \cdots$ возрастающая цепочка открытых в Y множеств и $Y_i = X_i \cap Y$, где X_i — открыто в X. Тогда цепочка открытых множеств $X_i' \coloneqq X_1 \cup \ldots \cup X_i$ возрастает и дает те же пересечения с Y, что и X_i. Следовательно, с некоторого момента цепочка X_i' обрывается, а значит цепочка Y_i тоже обрывается.

B. Следующие утверждения равносильны:

(1) X — нетерово.

(2) X — наследственно бикомпактно, т.е. любое подпространство $Y \subseteq X$ бикомпактно.

Доказательство. Пусть X нетерово. Пусть $Y \subseteq X$ и пусть $\mathcal{U}$ открытое покрытие Y. Тогда если $\mathcal{U}$ бесконечно, выберем непустые различные $U_1, U_2, \ldots \in \mathcal{U}$ и положим $V_n \coloneqq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Тогда $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть цепочка возрастающих открытых множеств, а значит с некоторого момента обрывается. Значит Y имеет конечное подпокрытие $\mathcal{U}$ и, тем самым, бикомпактно.

Обратно, пусть любое подпространство X бикомпактно. Рассмотрим произвольную возрастающую цепочку открытых подмножеств $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots$. Положим $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Тогда $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ открытое покрытие U, а значит из него можно выделить конечное подпокрытие $\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_N}\}$. Но тогда $U = U_j$, где $j = \max\limits_{k \in \{1,\ldots,N\}} i_k$, откуда $U_j = U_{j+1} = \cdots$, т.е. цепочка U_i обрывается. Значит X нетерово.

C. Может ли бесконечный бикомпакт (т.е. бесконечное множество с хаусдорфовой бикомпактной топологией) быть нетеровым пространством?

Доказательство. Сначала покажем, что бесконечное хаусдорфово пространство X содержит бесконечное дискретное подпространство. Действительно, последовательно выбрав непустые открытые U_i так, чтобы $X_n \coloneqq X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}$ было бесконечным и $U_{n+1} \subseteq X_n$, мы сможем выбрать по элементу x_i в U_i и получим бесконечное дискретное подпространство X. Поскольку для каждого n верно, что X_n открытое бесконечное хаусдорфово пространство, то достаточно доказать, что в бесконечном хаусдорфовом пространстве можно выбрать непустое $U \subseteq X$ так, чтобы $X \setminus \overline{U}$ было бесконечным. Пусть это не так. Тогда по хаусдорфовости X существует непустое $U \subseteq X$ такое, что $\overline{U} \neq X$. По нашему предположению $X \setminus \overline{U}$ конечное, а также T_1-пространство, следовательно дискретное (поскольку любое подмножество есть объединение конечного количества точек и, тем самым, замкнуто; значит дополнение открыто). Но тогда $\forall x \in X \setminus \overline{U}$ одноэлементное $U_0 = \{x\}$ открыто в $X \setminus \overline{U}$, а значит и в X. С другой стороны U_0 также замкнуто в X, откуда $X \setminus \overline{U_0} = X \setminus \{x\}$ бесконечно — противоречие.

Пусть теперь $D \subseteq X$ — бесконечное дискретное подпространство. Тогда если X нетерово, то D тоже нетерово и бикомпактно. Но ведь тогда нельзя выделить конечное подпокрытие из открытого покрытия $\{\{x\}: x \in D\}$ — противоречие. Значит бесконечный бикомпакт не может быть нетеровым.

3.2. (*Теорема Александера о предбазе*) Докажите следующий критерий бикомпактности, принадлежащий Дж. У. Александеру

Теорема 1. Пусть X — топологическое пространство и пусть $\mathcal{S}$ — некоторая его предбаза. Если всякое открытое покрытие X элементами данной предбазы $\mathcal{S}$ содержит конечное подпокрытие, то X бикомпактно.

Доказательство. Предположим, что X не бикомпактно. Пусть Σ есть множество всех открытых покрытий X, не допускающих выделение конечного подпокрытия. Определим

$$\mathcal{C} \coloneqq \bigcup_{\mathcal{U}\in\Sigma} \mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$$

как объединение всех таких покрытий, где $U_i \subset X$. Ясно, что тогда и $\mathcal{C} \in \Sigma$, поскольку иначе из него можно было бы выделить конечное подпокрытие, покрывающее все покрытия из Σ. Пусть теперь $U \notin \mathcal{C}$ открыто. Тогда покрытие $\{U\} \cup \mathcal{C}$ имеет конечное подпокрытие. $\mathcal{S} \cap \mathcal{C}$ не покрывает X, поскольку иначе из него можно было бы выделить конечное подпокрытие, что противоречило бы определению $\mathcal{C}$. Значит существует $x \in X$, не покрытая $\mathcal{S} \cap \mathcal{C}$. Понятно, что $x \in U_i$ для некоторого $i \in I$. Это $U_i = V_1 \cap \ldots \cap V_n$ для некоторых $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{S}$. x не покрыт V_j, следовательно $V_j \notin \mathcal{C}$. Поскольку $\mathcal{C}$ есть максимальное покрытие, не допускающее выделение конечного подпокрытия, имеем, что для любого $j \in \{1, \ldots, n\}$ существует конечное $\mathcal{C}_j \subset \mathcal{C}$ такое, что $\{V_j\} \cup \mathcal{C}_j$ есть конечное подпокрытие X. Имея в виду равенство $U_i = V_1 \cap \ldots \cap V_n$ получаем, что $\{U_i\} \cup \mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_n$ есть конечное подпокрытие X — противоречие.

3.3. Докажите первую теорему Тихонова (произведение бикомпактных пространств бикомпактно), пользуясь теоремой Александрова о предбазе.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ есть покрытие $X = \prod_{\alpha\in\mathfrak{A}} X_\alpha$ множествами предбазы $\mathcal{S}$, т.е. любое $U \in \mathcal{U}$ есть множество вида $\pi^{-1}_{\alpha(U)}(O_U)$ для некоторых $\alpha(U) \in \mathfrak{A}$ и $O_U \in \tau_{\alpha(U)}$. Положим $\mathcal{O}_\alpha \coloneqq \{O_U : \alpha(U) = \alpha\}$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$. Если для некоторого $\alpha \in \mathfrak{A}$ верно, что $\mathcal{O}_\alpha$ — открытое покрытие X_α, то найдется конечное $\mathcal{O}'_\alpha \subseteq \mathcal{O}_\alpha$ такое, что $\{\pi_\alpha^{-1}(O) : O \in \mathcal{O}'_\alpha\} \subseteq \mathcal{U}$ — конечное покрытие X. Пусть такое α не нашлось. Тогда для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$ найдется $x_\alpha \in X_\alpha \setminus \mathcal{O}_\alpha$. Но этот $x = (x_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ не будет покрыт $\mathcal{U}$ — противоречие. Значит вышеуказанное α, а также конечное подпокрытие X найдутся.

3.4. (*Компактификация дискретного пространства*) Пусть X — пространство с дискретной топологией. Покажите, что в этом случае на множестве всех ультрафильтров на X определена топология (так называемая топология Стоуна), превращающая это множество в пространство, гомеоморфное компактификации Стоуна-Чехова βX пространства X.

Доказательство. Пусть $\beta X_{\mathcal{F}}$ — пространство всех ультрафильтров над X, снабженной топологией $\tau_{\mathcal{F}}$, порожденной базой $\mathcal{B} \coloneqq \{U_A : A \subset X\}$, где U_A — множество всех ультрафильтров на X, содержащих A (база определена корректно, поскольку, во-первых, очевидно, любой ультрафильтр содержится в некотором U_A и, во-вторых, если ультрафильтр $\mathcal{U} \in U_A \cap U_B$, то и $\mathcal{U} \in U_{A\cap B} \subseteq U_A \cap U_B$).

Определим $h: X \to \beta X_{\mathcal{F}}$ как $x \mapsto \mathcal{F}_x$, где $\mathcal{F}_x = \{A \subseteq X: x \in A\}$ — главный ультрафильтр x. Тогда h есть гомеоморфизм между X и $h(X)$. Действительно, понятно, что h — инъекция. Заметим, что база $\mathcal{B}$ содержит $U_{\{x\}} = \{\mathcal{F} \in \beta X_{\mathcal{F}}: \{x\} \in \mathcal{F}\} = \mathcal{F}_x$, которое означает, что $h(X)$ состоит из изолированных точек. Отсюда X и $h(X)$ имеют ту же (дискретную) топологию.

Покажем, что $h(X)$ всюду плотно в $\beta X_{\mathcal{F}}$, т.е. что для любого ультрафильтра $\mathcal{F} \in \beta X_{\mathcal{F}}$ любая его окрестность U пересекает $h(X)$. Рассмотрим любой элемент базы $U_A \subseteq U$, содержащий $\mathcal{F}$ и выберем любой $a \in A$. Тогда $\mathcal{F}_a \in h(X)$ содержит A, а значит $\mathcal{F}_a \in U_A$.

Заметим, что $h(X)$ хаусдорфово: для любых $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \beta X_{\mathcal{F}}$ выберем $A: A \in \mathcal{F}, A \notin \mathcal{G}$, т.е. $X \setminus A \in \mathcal{G}$; тогда окрестности U_A и $U_{X \setminus A}$ ультрафильтров $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ не пересекаются.

Заметим также, что $\beta X_{\mathcal{F}}$ — бикомпактно. Пусть $\mathcal{U}$ — открытое покрытие $\beta X_{\mathcal{F}}$. Без ограничения общности можно считать, что все эти множества покрытия из базы $\mathcal{B}$, т.е. $\mathcal{U} = \{U_A\}_{A \in \mathcal{A}}$. Это означает, что любой ультрафильтр $\mathcal{F}$ содержит некоторое $A \in \mathcal{A}$, т.е. не содержит $X \setminus A$. Пусть $\mathcal{C}$ есть множество всех конечных пересечений элементов из $\{X \setminus A\}_{A \in \mathcal{A}}$. Если $\emptyset \notin \mathcal{C}$, то $\mathcal{F} \coloneqq \{A \subseteq X: \exists B \in \mathcal{C}\ B \subseteq A\}$ есть фильтр и содержится в некотором ультрафильтре, который по построению содержит любой $X \setminus A$ — противоречие. Значит существуют $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, для которых $(X \setminus A_1) \cap \dots \cap (X \setminus A_n) \neq \emptyset$, или $A_1 \cup \dots \cup A_n = X$. В силу свойства $U_{A \cup B} = U_A \cup U_B$ находим конечное покрытие $U_{A_1} \cup \dots \cup U_{A_n} = \beta X_{\mathcal{F}}$.

Для доказательства того, что $\beta X_{\mathcal{F}}$ есть компактификация Стоуна-Чеха остается проверить условие (3) теоремы 0.10 Стоуна-Чеха из восьмой лекции: любое непрерывное отображение $\varphi: h(X) \to C$ пространства $h(X)$ в бикомпакт C может быть продолжено до непрерывного отображения $\bar{\varphi}: \beta X_{\mathcal{F}} \to C$. В силу гомеоморфности X и $h(X)$ можно считать, что φ бьет из X.

По предложению 0.16 седьмой лекции всякий ультрафильтр $\mathcal{F}$ имеет ровно одну предельную точку c. Определим $\bar{\varphi}: \mathcal{F} \mapsto c$. Понятно, что это отображение является продолжением φ. Проверим непрерывность $\bar{\varphi}$. Для данного ультрафильтра $\mathcal{F}$ обозначим $c \coloneqq \bar{\varphi}(\mathcal{F})$ и пусть V — окрестность c. Предъявим окрестность U ультрафильтра $\mathcal{F}$, для которой $\bar{\varphi}(U) \subset V$. По малой лемме Урысона (лекция 4) существует окрестность V_0 точки c, для которой $\overline{V_0} \subset V$. Выберем $A \in \mathcal{F}$ так, чтобы $\varphi(A) \subset V_0$ и положим $U = U_A$. Тогда для всякого ультрафильтра $\mathcal{G} \ni A$ его предельная точка d лежит в V. Пусть это не так, тогда $d \in C \setminus \overline{V_0}$. Выберем $B \in \mathcal{G}$ так, чтобы $\varphi(B) \subset C \setminus \overline{V_0}$. Тогда для какой-то точки $y \in A \cap B$ одновременно $\varphi(y) \in V_0$ и $\varphi(y) \in C \setminus \overline{V_0}$ — противоречие. Таким образом доказано, что $\beta X_{\mathcal{F}}$ эквивалентна βX.

3.5.

A. (*Паракомпакты нормальны*) Пусть X — паракомпакт (паракомпактное хаусдорфово пространство). Покажите, что X — нормальное пространство.

Доказательство. Покажем сначала, что X — регулярное. Пусть $x \in X$ и $C \subset X$ — замкнутое множество, не содержащее x. По хаусдорфовости для любого $c \in C$ существуют непересекающиеся окрестности $U_{x,c} \ni x$ и $U_c \ni c$. $\{U_c\}_{c \in C}$ есть открытое покрытие C, а значит $\{U_c \subset X\}_{c \in C} \cup X \setminus C$ есть открытое покрытие X. По паракомпактности есть вписанное в это покрытие локально конечное открытое покрытие. Отбрасывая из него все открытые подмножества, не пересекающие C получаем локально конечное покрытие $\mathcal{P}$ множества C, вписанное в $\{U_c\}_{c \in C}$. Выберем окрестность $W_x \ni x$, пересекающуюся только с конечным количеством элементов $U_1, \dots, U_n$ из $\mathcal{P}$. Пусть $T = \{c_1, \dots, c_n\} \subset C$ такое, что $U_i \subset U_{c_i}$. Положим

$$U_x = W_x \cap \bigcap_{i=1}^{n} U_{x,c_i}, \qquad U_C = \bigcup_{U \in \mathcal{P}} U.$$

Тогда U_x и U_C непересекающиеся окрестности x и C (поскольку все элементы $\mathcal{P}$, пересекающие W_x, возникают только среди U_{c_i}, которые не пересекаются с соответствующими U_{x,c_i}).

Докажем, что X — нормальное. Пусть $A, B \subseteq X$ — непересекающиеся замкнутые множества. По регулярности для всякого $a \in A$ существуют непересекающиеся окрестности $U_a \ni a$ и $U_B \supset B$. $\{U_a\}_{a\in A}$ есть открытое покрытие A, а значит $\{U_a\}_{a\in A} \cup X \setminus A$ есть открытое покрытие X. В него вписано какое-то локально конечное открытое подпокрытие. Отбрасывая из него не пересекающиеся с A открытые множества получим локально конечное открытое покрытие Q множества A, вписанное в $\{U_a\}_{a\in A}$. Пусть $U_A = \bigcup_{U\in Q} U$. Заметим, что для всякого $b \in B$ существует окрестность $W_b \ni b$, не пересекающуюся с U_A. Действительно, для каждого $b \in B$ выберем окрестность $T_b \ni b$, пересекающуюся только с конечным количеством элементов $U_1, \dots, U_n$ из Q. Выберем $T = \{a_1, \dots, a_n\} \subset A$ так, чтобы $U_i \subset U_{a_i}$. Тогда подойдет $W_b \coloneqq T_b \cap \bigcap_{i=1}^n V_{a_i}$. Наконец, пусть $U_B = \bigcup_{b\in B} W_b$. Тогда по вышесказанному U_A и U_B есть непересекающиеся окрестности A и B.

В. (*Разбиения единицы на паракомпактах*) Пусть $f: X \to \mathbb{R}$ — вещественнозначная функция. Носителем $\operatorname{supp} f$ называется замыкание множества точек $x \in X$, в которых $f(x) \neq 0$.

Пусть X — топологическое пространство. *Разбиением единицы* на X называется всякое семейство непрерывных функций $\{f_i: X \to [0,1], i \in I\}$, такое что

— система множеств $\{\operatorname{supp} f_i\}$ локально конечна;

— $\sum_{i\in I} f_i(x) = 1$ для всех $x \in X$.

Пусть $\nu = \{U_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ — открытое покрытие X. Разбиение единицы $\{f_i\}$ *подчинено* покрытию ν, если для каждого i существует α, такой что $\operatorname{supp} f_i \subseteq U_\alpha$.

Покажите, что если X — паракомпакт, то для любого его открытого покрытия ν существует подчиненное ему разбиение единицы.

Доказательство. По паракомпактности для любого открытого покрытия X существует вписанное в него локально конечное открытое покрытие $\nu = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$. Достаточно показать, что у ν есть подчиненное разбиение единицы (это разбиение также будет подчинено исходному покрытию).

По теореме Лефшеца (лекция 9) для локально конечного покрытия $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ существует более мелкое открытое локально конечное покрытие $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ (т.е. $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$). Применяя эту теорему еще раз к $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ находим еще более мелкое открытое покрытие $\{W_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$:

$$\overline{W_\alpha} \subset V_\alpha \subset \overline{V_\alpha} \subset U_\alpha.$$

Значит для любого α имеем два непересекающихся замкнутых множества, а именно $\overline{W_\alpha}$ и $X \setminus V_\alpha$. Имея в виду, что паракомпакты нормальны, по большой лемме Урысона (лекция 4) существует непрерывная функция $h_\alpha: X \to [0,1]$, для которой $h_\alpha(\overline{W_\alpha}) = \{1\}$, $f_\alpha(X \setminus V_\alpha) = \{0\}$, причем $h_\alpha^{-1}\big((0,1]\big) \subset V_\alpha$. Отсюда $\operatorname{supp} h_\alpha = \overline{h_\alpha^{-1}\big((0,1]\big)} \subset \overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$. Значит система $\{\operatorname{supp} h_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ локально конечна. Рассмотрим функцию $h(x) = \sum_{\alpha\in\mathfrak{A}} h_\alpha(x)$. По локальной конечности нашего покрытия сумма в определении h имеет только конечное число ненулевых слагаемых. Более того, $h(x) \neq 0$ ни для какого $x \in X$, так как $\{\overline{W_\alpha}\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ такое покрытие, для которого существует $\alpha_x \in \mathfrak{A}$ с $x \in \overline{W_{\alpha_x}}$ и $h_\alpha\big(\overline{W_{\alpha_x}}\big) = \{1\}$. Поэтому можно определить $f_\alpha \coloneqq h_\alpha / h$ и иметь $\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}} f_\alpha = 1$. Таким образом $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ — требуемое разбиение единицы, как требовалось.