Топология 2 Листок 1
(Осень 2022)

Материал: основные геометрические понятия, гомотопии.

1.1. Пусть X – топологическое пространство, A – его подпространство. Деформационной ретракцией X на A в слабом смысле называется гомотопия $f_t : X \to X$, такая что $f_0 = \mathrm{Id}$, $f_1(X) = A$ и $f_t(A) = A$ при всех t. Покажите, что если X деформационно ретрагируется на A в слабом смысле, то включение $A \hookrightarrow X$ является гомотопической эквивалентностью.

1.2. Покажите, что пространство X стягиваемо тогда и только тогда, когда любое непрерывное отображение $f : X \to Y$ (Y произвольно) гомотопно постоянному отображению. Также X стягиваемо тогда и только тогда, когда любое непрерывное отображение $f : Y \to X$ гомотопно постоянному.

1.3. Покажите, что $f : X \to Y$ – гомотопическая эквивалентность, если существуют отображения $g, h : Y \to X$, такие что $f \circ g = 1_Y$, $h \circ f = 1_X$.

1.4. Пусть r_t^0, r_t^1 – две деформационные ретракции пространства X на подпространство A. Покажите, что существует семейство деформационных ретракций $r_t^s : X \to X$, $0 \leq s \leq 1$, непрерывное в смысле непрерывности отображения

$$X \times I \times I \to X, \ \ (x, s, t) \mapsto r_t^s(x)$$

и такое что $r_t^{s=0} = r_t^0$ и $r_t^{s=1} = r_t^1$.

1.5. Пусть X – топологическое пространство, θ – его замкнутая топология. Подмножество $Y \subseteq X$ называется k-*замкнутым*, если для всякого бикомпакта (хаусдорфова бикомпактного пространства) K и всякого непрерывного отображения $g : K \to X$ прообраз $g^{-1}Y$ замкнут в K. Совокупность $k\theta$ всех k-замкнутых подмножеств X образует замкнутую топологию, при этом всегда $\theta \subseteq k\theta$. Обозначим как kX множество X с топологией k-замкнутых подмножеств.

Пространство X называется k-*пространством*, если $\theta = k\theta$ (или, что то же, $X = kX$).

Пространство называется X *слабо хаусдорфовым*, если для всякого бикомпакта K и всякого непрерывного отображения $g : K \to X$ образ $g(K)$ замкнут в X. Пространство X называется *компактно порожденным*, если оно является слабо хаусдорфовым k-пространством.

A. Докажите, что всякое хаусдорфово пространство слабо хаусдорфово. Проверьте, что слабая хаусдорфовость строго сильнее T_1 и строго слабее T_2.

B. Докажите, что всякое пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, является k-пространством.

C. Докажите, что всякое локально бикомпактное хаусдорфово пространство является компактно порожденным пространством.

D. Пусть X – пространство, K – бикомпакт. Тогда отображение $f : K \to X$ непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно как отображение $K \to kX$ (это немедленно следует из определения k-замкнутого множества). Выведите отсюда, что $k^2X = kX$ (kX всегда k-пространство).

E. Пусть X, Y – пространства и $X = kX$. Тогда отображение $f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно как отображение $X \to kY$.

F. Пусть X – k-пространство, Y – пространство. Тогда отображение $f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для всякого бикомпакта K и всякого непрерывного отображения $g : K \to X$ непрерывно отображение $f \circ g$.

G. Если X – k-пространство, а E – отношение эквивалентности на множества X, то факторпространство $Y = X/E$ также k-пространство.

H. Если пространства $\{X_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ являются k-пространствами, то k-пространством также будет их дизъюнктное объединение $X = \sqcup_\alpha X_\alpha$.

I. Пусть семейство $\{X_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ состоит из k-пространств. Тогда их тихоновское произведение не является, вообще говоря, k-пространством. Однако справедливо следующее: все проекции

$$p_\alpha : k(\prod_\alpha X_\alpha) \to X_\alpha$$

непрерывны.

Проведите доказательство этого утверждения. Также докажите, что если Y – k-пространство, то отображение $f : Y \to k(\prod_\alpha X_\alpha)$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны его композиции с проекциями $p_\alpha \circ f$.