Задача 1.1. Включение $A \hookrightarrow X$ обозначим через i. Нужно показать, что существует $g: X \to A$ такое, что $gi \simeq \mathrm{Id}_A$ и $ig \simeq \mathrm{Id}_X$. Заметим, что можно положить $g = f_1$. Действительно, $gi = f_1 i: A \to A \simeq \mathrm{Id}_A$, так как отображение

$$(x,t) \mapsto f_t i(x) = f_t|_A(x)$$

непрерывно в силу того, что f гомотопия и i непрерывна, поэтому $f_0 i = f_0|_A = \mathrm{Id}_A$.

Теперь рассмотрим $ig = if_1: X \to X$. Пусть $i_1: A \to X$ — естественное включение. Определим $g_t \coloneqq f_t \circ i_1 : A \to X$. Тогда $g_1: A \to X$ и $g_0 = \mathrm{Id}_X$. Определим гомотопию

$$G: A \times I \to X, \qquad (x,t) \mapsto g_t(x).$$

Имеем $f_1(X) = A$ и $f_t(A) = A$ для всех $t \in I$, следовательно $g_t(A) = A$ для всех $t \in I$. Это означает, что G можно естественным образом непрерывно продолжить до $G: X \times I \to A$, которое будет искомой гомотопией, что и требовалось.

Задача 1.2. Пусть любое отображение $f: X \to Y$ для всех Y гомотопно постоянному. Тогда это утверждение верно и для тождественного отображения $\mathrm{Id}_X: X \to X$, а значит X — стягиваема. Действительно, пусть $F: X \to \{p\}$ — постоянное отображение $x \mapsto p$ и пусть $G: \{p\} \to X$ — вложение некоторой точки $G(p) = x_0$. Имеем

$$F \circ G(p) = F(x_0) = p \implies F \circ G = \mathrm{Id}_{\{p\}},$$

$$G \circ F(x) = G(p) = x_0 \implies G \circ F = \mathrm{const}.$$

Поскольку $\mathrm{Id}_X \simeq \mathrm{const}$, то и $G \circ F \simeq \mathrm{Id}_X$. Таким образом X — стягиваема.

Аналогично, пусть любое отображение $f: Y \to X$ для всех Y гомотопно постоянному. Тогда это утверждение верно и для тождественного отображения, а значит X стягиваема по вышеприведенному рассуждению.

Пусть теперь X — стягиваема. Т.е. существует точка $p \in X$ и такая гомотопия $h: X \times I \to X$, что h_0 — тождественно на X и h_1 постоянна со значением p.

Если еще $f: X \to Y$, то $f \circ h: X \times I \to Y$ — гомотопия из f в постоянное отображение со значением $f(p)$. Следовательно, f — гомотопно постоянному.

Если, с другой стороны, $f: Y \to X$, то отображение

$$Y \times I \to X, \qquad (y,t) \mapsto h(f(y),t)$$

— гомотопия из f в постоянное отображение со значением p. Следовательно, f — гомотопно постоянному.

Задача 1.3. Если $h \circ f \simeq \mathrm{Id}_X$ и $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y$, то $g \simeq h \circ f \circ g \simeq h$. Следовательно, $g \circ f \simeq h \circ f \simeq \mathrm{Id}_X$. С другой стороны, по условию $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y$, а значит g является и левым, и правым обратным к f. Таким образом, f — гомотопическая эквивалентность.

Задача 1.4. Будем искать r_t^s в виде $r^0_{f(s,t)} \circ r^1_{g(s,t)}$. Нам нужно гарантировать следующие условия:

- $r_0^s = \mathrm{id}$; это условие выполнится, если $f(s,0) = g(s,0) = 0$;

- $r_t^s|_{s=1} = r_t^1$; выполнится, если $f(1, t) = 0$;
- $r_t^s|_{s=0} = r_t^0$; выполнится, если $g(0, t) = 0$;
- $r_1^s(X) = A$; выполнится, если $f(s, 1) = 1 \vee g(s, 1) = 1$.

Например, для всякого $\varepsilon \in (0, 1)$ подойдут непрерывные функции

$$f(s, t) = \begin{cases} t, & 0 \le s < \varepsilon \\ t \cdot \dfrac{1 - s}{1 - \varepsilon}, & \varepsilon \le s \le 1 \end{cases}, \qquad g(s, t) = \begin{cases} t \cdot \dfrac{s}{\varepsilon}, & 0 \le s < \varepsilon \\ t, & \varepsilon \le s \le 1 \end{cases}.$$

Задача 2.1. A. Сначала заметим, что функтор h_{-}, определенный как $h_c \coloneqq \hom_C(-, c)$, на самом деле является функтором $C \to \mathrm{PSh}(C)$. Т.е. если $f\colon c \to d$ — стрелка в C, мы должны указать как построить естественное преобразование $h_f\colon h_c \to h_d$. Нужно каждому объекту $e \in C$ сопоставить $h_f(e)\colon h_c(e) \to h_d(e)$. Достаточно положить

$$h_c(e) = \hom_C(e, c)\,, \qquad h_d(e) = \hom_C(e, d)\,, \qquad h_f(e) = \hom_C(e, f\,-).$$

Чтобы доказать пункт A нужно построить взаимно обратные естественные преобразования $F \to \hom_{\mathrm{PSh}(C)}(h_{-}, F)$ и $\hom_{\mathrm{PSh}(C)}(h_{-}, F) \to F$.

Сначала разберемся с первым. Для $c \in C$ рассмотрим отображение

$$F(c) \to \hom_{\mathrm{PSh}(C)}(h_c, F)\,, \qquad x \mapsto \varphi_x\colon h_c \to F,$$

где на объекте d стрелка φ_c определена как

$$\varphi_c(d)\colon \hom_C(d, c) \to F(d), \qquad \varphi_c(d)(f) = F(f)(c).$$

Нетрудно проверить, что это естественное преобразование.

В качестве обратного преобразования определим для $c \in C$ отображение

$$\hom_{\mathrm{PSh}(C)}(h_c, F) \to F(c), \qquad \varphi \mapsto \varphi(c)(1_c),$$

где $\varphi(c)\colon \hom_C(c, c) \to F(c)$.

Остается показать, что построенные отображения взаимно обратные. Естественное преобразование $\varphi \in \hom_C(h_c, F)$ полностью определяется значением $y_c \coloneqq \varphi(c)(1_c)$. Для стрелки $f \in \hom_C(d, c)$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
\hom_C(c, c) & \xrightarrow{g \mapsto g \circ f} & \hom_C(d, c) \\
\varphi(c) \downarrow & & \downarrow \varphi(d) \\
F(c) & \xrightarrow[F(f)]{} & F(d)
\end{array}$$

коммутативна. Значит, если $f \in \hom_C(d, c)$, то $\varphi(d)(f) \in F(d)$, и этот элемент из $F(d)$ определен значением $F(f)(y_c)$ в силу $f = 1_c \circ f$.

B. Вполне унивалентность вложения Y следует из того, что для любых $c, d \in C$

$$\hom_{\mathrm{PSh}(C)}\big(Y(c), Y(d)\big) \cong \hom_C(c, d).$$

Действительно, в утверждении пункта A подставив $F = Y(d)$ получим изоморфизм

$$\hom_{\mathrm{PSh}(C)}\big(Y(c), Y(d)\big) \cong Y(c)(d) = \hom_C(c, d).$$

Поскольку определенная в пункте A отображение $\hom_C(c, d) \to \hom_C\big(Y(c), Y(d)\big)$ в точности есть Y, следует биективность Y.

C. Утверждение этого пункта есть следствие из предыдущего, поскольку вполне унивалентный функтор отражает изоморфизмы (т.е. два объекта изоморфны тогда и только тогда, когда их образы изоморфны).

D. Если терминальный объект — $(d, g : Y(d) \to F) \cong \big(d, g \in F(d)\big)$, то $F \cong Y(d)$.

Утверждение следует из определения категории запятой и применения леммы Йонеды:

$$(Y \downarrow \Delta F)\Big(\big(c, f \in F(c)\big), \big(d, f \in F(d)\big)\Big) \cong \{h \in \hom_C(c, d) : F(h)(g) = f\}.$$

(Отсюда $(Y \downarrow \Delta F)\Big(\big(c, f \in F(c)\big), \big(d, f \in F(d)\big)\Big)$ — терминальный, в точности означает, что $F(-)(f) : \hom_C(c, d) \to F(c)$ — биекция.)

Задача 2.2. A. Следует из теоремы пункта B (импликация $3 \Longrightarrow 1$), поскольку K очевидно унивалентный, а также полный и существенно сюръективный по определению скелета.

B. ($2 \Longrightarrow 1$) Очевидно.

($1 \Longrightarrow 3$) Заметим, что $ST \cong I$ показывает, что каждый $c \in C$ имеет форму $c \cong S(Tc)$ для некоторого $d = Tc \in D$. Естественный изоморфизм $\psi : TS \cong I$ дает для каждого $f : d \to d'$ коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} TSd & \xrightarrow{\psi_d} & d \\ TSf \downarrow & & \downarrow f. \\ TSd' & \xrightarrow[\psi_{d'}]{} & d' \end{array}$$

Отсюда $f = \psi_{d'} \circ TSf \circ \psi_d^{-1}$ и S — унивалентен. Аналогично из $ST \cong I$ получим, что и T унивалентен. Для полноты S рассмотрим любую $h : Sd \to Sd'$ и положим $f = \psi_{d'} \circ TS \circ \psi_d^{-1}$. Тогда диаграмма выше также коммутирует при замене Sf стрелкой h, а значит $TSf = Th$. Поскольку T унивалентен, $Sf = h$, и тем самым S — полон.

($3 \Longrightarrow 2$) Нужно по S построить левый сопряженный T. Для каждого $c \in C$ можно выбрать по объекту $d_0 = T_0 c \in D$ и изоморфизм η_c:

$$\begin{array}{ccc} \eta_c : c & \cong & S(T_0, c) \\ & \searrow f & \downarrow Sg, \qquad g : T_0 c \to d. \\ & & Sd \end{array}$$

Для каждой стрелки $f : c \to Sd$ композиция $f \circ \eta_c^{-1}$ имеет форму Sg для некоторого g, поскольку S полон. Эта g единственна в силу унивалентности S. Иными словами, $f = Sg \circ \eta_c$ для единственного g, следовательно η_c универсален из c в S. Значит T_0 можно единственным образом превратить в функтор $T : C \to D$ так чтобы $\eta : I \to ST$ был естественным. Отсюда T есть левый сопряженный S единичным изоморфизмом η. В силу сопряженности $S\epsilon_d \cdot \eta_{Sd} = 1$ (нужно подставить $c = Sd$, $f = 1$ в диаграмме выше). Таким образом $S\epsilon_d = \eta_{Sd}^{-1}$ обратима. Поскольку S — вполне унивалентный, коединица ϵ_d тоже обратима. Следовательно, $\langle T, S; \eta, \epsilon \rangle : C \rightharpoonup D$ есть сопряженная эквивалентность.